Décomposition de Dunford via la méthode de Newton

Rombaldi, p. 627

Lemme : Soit $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tq $ab = ba$, a inversible et b nilpotent d'indice $r \geq 1$.
Alors $a-b$ est inversible, d'inverse $\left(\sum_{k=0}^{r-1} (a^{-1}b)^k\right) a^{-1}$.

$a - b = a(Id - a^{-1}b)$ avec a^{-1} et b commutent donc $(a^{-1}b)^r = 0$.
Alors $(Id - a^{-1}b) \sum_{k=0}^{r-1} (a^{-1}b)^k = Id - \underbrace{(a^{-1}b)^r}_{=0} = Id$.

Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ sur $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Soit $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, $\Pi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\beta_k}$ et $P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$.
Soit $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} w_0 = u \\ P'(w_k) \in GL(E) \text{ avec } (P'(w_k))^{-1} \in \mathbb{K}[u] \\ P(w_k) \text{ est nilpotent} \\ w_{k+1} = w_k - P(w_k)(P'(w_k))^{-1} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}$$
Alors $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Par récurrence sur k.

Initialisation : ① $P'(u)$ est inversible, d'inverse dans $\mathbb{K}[u]$:

P est scindé à racines simples $\Rightarrow P$ et P' n'ont pas de racines communes
$\Rightarrow \Pi_u$ et P' ———— (Π_u et P ont les mêmes racines)
$\Rightarrow \Pi_u \wedge P' = 1$

Par Bézout, $\exists U, V \in \mathbb{K}[X]$ tq $\Pi_u U + P'V = 1$. D'où $\underbrace{\Pi_u(u)}_{=0} \circ U(u) + P'(u)V(u) = Id$. Donc $(P'(u))^{-1} = V(u) \in \mathbb{K}[u]$.

② $P(u)$ est nilpotent :

Soit $m = \max_{1 \leq k \leq p} \beta_k$. Alors $P^m(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^m$ est un multiple de $\Pi_u(X)$. D'où $(P(u))^m = P^m(u) = 0$. D'où $P(u)$ nilpotent.

Hérédité : Supposons $w_0, \dots, w_k$ construits. Posons $w_{k+1} = w_k - P(w_k)(P'(w_k))^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

① $P'(w_{k+1})$ est inversible, d'inverse dans $\mathbb{K}[u]$:

$\boxed{\text{WLOG } p \geq 2}$ Par la formule de Taylor, on a :

Si $p = 1$, $w_k = \lambda_1 Id$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$
$\hookrightarrow u = \lambda_1 Id + (u - \lambda_1 Id)$ est la décomposition de Dunford de u.

$P'(w_{k+1}) - P'(w_k) = (w_{k+1} - w_k) \underbrace{S_k(u)}_{\in \mathbb{K}[u]} = -P(w_k)(P'(w_k))^{-1} S_k(u) = P(w_k) \underbrace{R_k(u)}_{\in \mathbb{K}[u]}$

$P'(w_{k+1}) = P'(w_k) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{P^{(j+1)}(w_k)}{j!} (w_{k+1} - w_k)$

Donc $P'(w_{k+1}) - P'(w_k)$ est nilpotent car $P(w_k)$ l'est. De plus, $P'(w_k)$ est inversible et commute avec $P'(w_{k+1}) - P'(w_k)$ nilpotent.
Donc $P'(w_{k+1})$ est inversible, d'inverse dans $\mathbb{K}[u]$ par le lemme.

② $P(w_{k+1})$ est nilpotent :

WLOG $p \geq 2$. Par la formule de Taylor :

$$P(w_{k+1}) = \underbrace{P(w_k) + (w_{k+1} - w_k)P'(w_k)}_{=0} + \sum_{j=2}^{p} \frac{P^{(j)}(w_k)}{j!} (w_{k+1} - w_k)$$
$$= (w_{k+1} - w_k)^2 \underbrace{S_k(u)}_{\in \mathbb{K}[u]}$$
$$= \left(P(w_k)(P'(w_k))^{-1}\right)^2 S_k(u)$$
$$= P(w_k) \underbrace{R_k(u)}_{\in \mathbb{K}[u]}$$

Donc $P(w_{k+1})$ est nilpotent car $P(w_k)$ l'est.

Proposition : $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire sur d à partir d'un certain rang
où $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u.

On a que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(w_k) \in (P(u))^{2^k}\, \mathbb{K}[u]$. En effet, $P(w_0) = P(u)$ et si $P(w_k) \in (P(u))^{2^k}\, \mathbb{K}[u]$, alors
$P(w_{k+1}) = (P(w_k))^2 R_k(u) \in (P(u))^{2^{k+1}}\, \mathbb{K}[u]$.

Puisque $P(u)$ est nilpotent, $P(w_k) = 0$ pour k assez grand i.e. $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Soit $k_0 \geq 0$ le plus petit entier tq $P(w_{k_0}) = 0$. Alors w_{k_0} est diagonalisable car P est scindé à racines simples.

Si $k_0 = 0$, alors $u = w_0$ est diagonalisable. Donc $u = d$ et $n = 0$.

Si $k_0 \geq 1$, on écrit :

$$u - w_{k_0} = w_0 - w_{k_0} = \sum_{j=0}^{k_0-1} (w_j - w_{j+1}) = \sum_{j=0}^{k_0-1} \underbrace{P(w_j)(P'(w_j))^{-1}}_{\in P(u)^{2^j}\mathbb{K}[u]} \in P(u)\,\mathbb{K}[u]$$

Comme $P(u)$ est nilpotent, $u - w_{k_0}$ l'est aussi.

Ainsi $u = w_{k_0} + (u - w_{k_0})$ est la décomposition de Dunford de u car $\underbrace{w_{k_0}}_{\in \mathbb{K}[u]}$ et $\underbrace{(u - w_{k_0})}_{\in \mathbb{K}[u]}$ commutent.